SÉRIE 03

Ex1 :

Sont les coord. du vecteur position $\vec{OM}$ → $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = -3t^2 \\ z(t) = t^3 + 3t \end{cases}$ les équations horaires permettent la détermination de la position du mobile dans l'espace à chaque instant t.

1/- Calcul du vecteur $\vec{v}$ et $\vec{a}$

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \dot{x} = 3t^2 - 3 \\ v_y = \dot{y} = -6t \\ v_z = \dot{z} = 3t^2 + 3 \end{cases}$$

d'où : $\boxed{\vec{v} = 3(t^2-1)\vec{i} - 6t\vec{j} + 3(t^2+1)\vec{k}}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} a_x = \dot{v}_x = 6t \\ a_y = \dot{v}_y = -6 \\ a_z = \dot{v}_z = 6t \end{cases}$$

d'où : $\boxed{\vec{a} = 6t\vec{i} - 6\vec{j} + 6t\vec{k}}$

2/- Norme de $\vec{v}$ et angle

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$= \sqrt{9(t^2-1)^2 + 36t^2 + 9(t^2+1)^2}$$

$$\boxed{\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}(1+t^2)}$$

Montrons que le vecteur $\vec{v}$ fait un angle constant avec l'axe Oz

$$\vec{v}.\vec{k} = v.k \cos(\widehat{\vec{v},\vec{k}}) \qquad \theta = (\widehat{\vec{v},\vec{k}})$$

$$\vec{v}.\vec{k} = \begin{pmatrix} 3(t^2-1) \\ -6t \\ 3(t^2+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3(t^2+1)$$

$$v = 3\sqrt{2}(t^2+1) \quad \text{et} \quad k = 1$$

donc

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{v.k} = \frac{\cancel{3}\cancel{(t^2+1)}}{\cancel{3}\sqrt{2}\cancel{(1+t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = c^{st}$$

$$\boxed{\theta = \pm\pi/4 = c^{st}}$$

Ce qui montre que le vecteur vitesse fait un angle constant avec l'axe Oz.

SÉRIE 03

Ex2 :

$\vec{OM} \Rightarrow \begin{cases} x = \ln t \\ y = t + 1/t \end{cases}$

1/- Trouver l'Éqt de la trajectoire du Mobile

On élimine le Temps t des 2 éqt horaires.

$x = \ln t \Rightarrow \boxed{t = e^x}$ on remplace dans $y(t)$

$\Rightarrow \boxed{y = e^x + 1/e^x = e^x + e^{-x}}$ //

C'est l'équation de la trajectoire de M.

2/- Vitesse et Accélération :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{cases} v_x = \dot{x} = 1/t \\ v_y = \dot{y} = 1 - 1/t^2 \end{cases}$$

Module de $\vec{v}$:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1/t^4 - 1/t^2 + 1} \ [m/s]$$

Accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -1/t^2 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = +2/t^3 \end{cases}$$

Module :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{1}{t^2}\sqrt{4/t^2 + 1} \ [m/s^2]$$

À $t = 1s$:

$$\begin{cases} V = 1 \ m/s \\ a = \sqrt{5} \ m/s^2 \end{cases}$$